Opción A

1A.- Dada la ecuación matricial $M\cdot X + N = P$, donde X es la matriz de las incógnitas y $M=\begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$,

$N=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) ¿Para qué valores del parámetro a existe la matriz inversa de M? [1 punto]
(b) Calcula la matriz inversa de M. [3 puntos]
(c) Para a = 2, resuelve la ecuación matricial, si es posible. [3 puntos]
(d) Para los de a para los cuales existe la matriz inversa de M, resuelve la ecuación matricial. [3 puntos]

Solución

(a)
¿Para qué valores del parámetro a existe la matriz inversa de M? [1 punto]

Existe la matriz inversa de M si $\det(M) = |M| \neq 0$

$|M|=\begin{vmatrix} -1 & a \\ a & a \end{vmatrix} = -a - a^2 = a\cdot(-1 - a)$, **luego si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ existe M^{-1}.**

(b)
Calcula la matriz inversa de M.

Sabemos que $M^{-1}=\dfrac{1}{|M|}Adj(M^t)$

$M^t=\begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$; $Adj(M^t)=\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix}$; $M^{-1}=\dfrac{1}{|M|}\cdot Adj(M^t)=\dfrac{1}{a\cdot(-1-a)}\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{1+a} & \dfrac{1}{1+a} \\ \dfrac{1}{1+a} & \dfrac{1}{a\cdot(1+a)} \end{pmatrix}$.

(c)
Para a = 2, resuelve la ecuación matricial, si es posible.

Para a = 2, $M=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hemos visto que $M^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

De $M\cdot X + N = P \rightarrow M\cdot X = P - N$. Multiplicando $\rightarrow M\cdot X = P – N$ por M-1 por la izquierda tenemos:
$M^{-1}\cdot M\cdot X = M^{-1}\cdot(P – N) \rightarrow M^{-1}\cdot M\cdot X = M^{-1}\cdot(P – N)$, **luego $X = M^{-1}\cdot(P – N)$**.

$P – N = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{X = M^{-1}\cdot(P – N) =} \dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

(d)
Para los de a para los cuales existe la matriz inversa de M, resuelve la ecuación matricial. [3 puntos]

Hemos visto que para **$a \neq 0$ y $a \neq -1$ existía** $M^{-1} = \dfrac{1}{a\cdot(1+a)}\begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, luego:

$\mathbf{X = M^{-1}\cdot(P – N) =} \dfrac{1}{a\cdot(1+a)}\begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{a\cdot(1+a)}\begin{pmatrix} -2a & -2a \\ 2a & 2a \end{pmatrix}=\dfrac{2a}{a\cdot(1+a)}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{2}{(1+a)}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2A.- Considera la función $f(x) = \dfrac{1}{(x - 3)(x + 3)}$.

(a) Determina: el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las coordenadas de los máximos y los mínimos y el $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. (2 puntos)
(b) Haz un esbozo de la gráfica. (1 punto)
(c) Obtén los valores de A y B para los cuales $f(x) = \dfrac{A}{x - 3}+\dfrac{B}{x + 3}$. (3 puntos)
(d) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas de ecuaciones

$x = -2$ y $x = 2$. (4 puntos)

Solución

(a)

Determina: el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las coordenadas de los máximos y los mínimos y el $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. (2 puntos)

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x^2-9}.$$

Dominio = R – {soluciones (x-3)(x+3) = 0} = R – {-3, +3}

Estudiamos f '(x) para la monotonía.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-9};\ f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-9)^2}.$$

Si f '(x) = 0 → 2x = 0, de donde *x = 0, que será el posible extremo relativo*.

Como $f'(-1) = \frac{2}{(1-9)^2} = \frac{2}{64} > 0$, **f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-∞, 0) – {-3}.**

Como $f'(1) = \frac{-2}{(1-9)^2} = \frac{-2}{64} < 0$, **f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (0, +∞) – {3}.**

Por definición en x = 0 hay un máximo relativo que vale f(0) = -1/9.

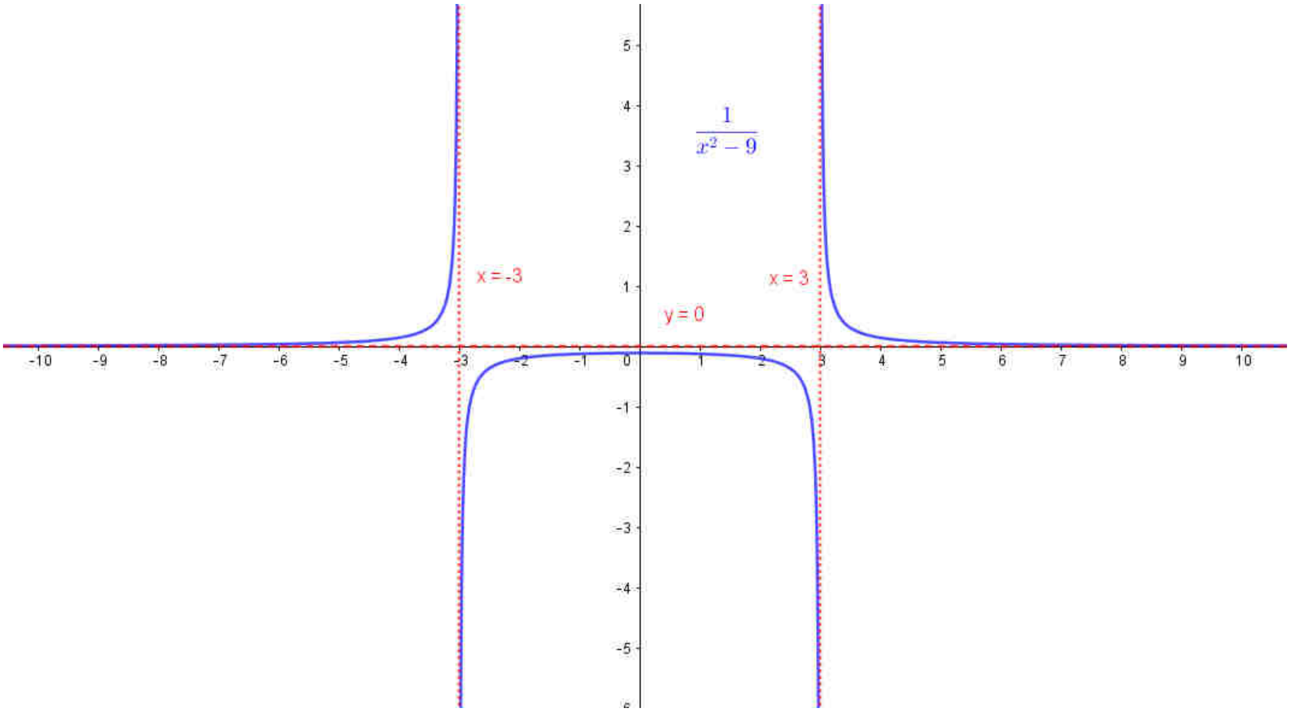
Veamos el comportamiento en ±∞.

Tenemos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, **con lo cual y = 0 es asíntota horizontal (A.H.) en ±∞, y la gráfica de f(x) está por encima de la A.H. y = 0 en ±∞.**

(b)

Haz un esbozo de la gráfica.

Con los datos anteriores un esbozo de la gráfica es:



(c)

Obtén los valores de A y B para los cuales $f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$.

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A\cdot(x+3)+B(x-3)}{(x-3)\cdot(x+3)}$$

Igualando numeradores:1 = A(x+3) + B(x-3).

Sustituimos “x” por el valor de las raíces del denominador (-3 y 3).

Para x = -3, 1 = -6B $\rightarrow$ **B = -1/6**. Para x = 3, 1 = 6A $\rightarrow$ **A = 1/6**.
(d)
Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas de ecuaciones x = -2 y x = 2.

Área = $\left|\int_{-2}^{2}\frac{1dx}{x^2-9}\right| = \left|\left[(1/6)\cdot\ln|x-3| - (1/6)\cdot\ln|x+3|\right]_{-2}^{2}\right|$ = | ((1/6)·ln(1) - (1/6)·ln(5)) - ((1/6)·ln(5) - (1/6)·ln(1)) | u^2 **=**

= | - (1/6)·ln(5)) - (1/6)·ln(5)) | u^2 = | - (1/3)·ln(5) | u^2 = (1/3)·ln(5) $u^2 \cong$ 0’536479 u^2.

3A.- Dadas las rectas (I) $\begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17, \\ 8x - y - 5z = 23, \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5, \\ 24x - 2y - 13z = 67. \end{cases}$

(a) Calcula un vector de posición y un vector director de cada una. [4 puntos]
(b) Calcular la ecuación vectorial de cada una. [2 puntos]
(c) Calcula el rango de la matriz formada por los vectores directores y el vector diferencia, o vector resta, de los vectores de posición obtenidos. [2 puntos]
(d) Del rango anterior, deducir la posición relativa de ambas rectas. [2 puntos]

Solución
(a)
Calcula un vector de posición y un vector director de cada una. [4 puntos]

Un vector director **u** la recta (I) es el producto vectorial de los vectores directores de cada plano que la forman, es decir **u =** $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 15 & 12 & -14 \\ 8 & -1 & -5 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(-60-14) – **j**(-75+112) + **k**(-15-96) = (-74, -37, -111), que es equivalente (divido entre -37) al $\mathbf{u_1}$ = (2, 1, 3).

Un vector director **v** la recta (II) es el producto vectorial de los vectores directores de cada plano que la forman, es decir **v =** $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 5 & -2 \\ 24 & -2 & -13 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(-65-4) – **j**(-117+48) + **k**(-18-120) = (-69, 69, -138), que es equivalente (divido entre -69) al $\mathbf{v_1}$ = (1, -1, 2).

Para obtener un punto de cada recta le doy a un incógnita (en ambas tomo x = 0) y resuelvo el sistema que me queda.

En (**I**) $\begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17, \\ 8x - y - 5z = 23, \end{cases}$ con x = 0 tenemos $\begin{cases} 12y - 14z = -17 \\ -y - 5z = 23 \end{cases}$. De la 2ª y = -23-5z y entrando en la 1ª resulta 12(-23-5z)-14z = -17 $\rightarrow$ -276-60z-14z = -17 $\rightarrow$-259 = 74z $\rightarrow$ z = -259/74 = -7/2.
Tenemos y = -23-5(-7/2) = -11/2, y un punto de (I) es A(0, -11/2, -7/2) y su vector de posición seria el **OA** = = **a** = (0, -11/2, -7/2).

En (**II**) $\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5, \\ 24x - 2y - 13z = 67. \end{cases}$ con x = 0 tenemos $\begin{cases} 5y - 2z = 5 \\ -2y - 13z = 67 \end{cases}$. De la 1ª z = -5/2+(5/2)y, y entrando en la 2ª resulta -2y - 13(-5/2-(5/2)y) = 67 $\rightarrow$ -4y+65-65y = 134 $\rightarrow$ -69 = 69y $\rightarrow$ y = -1.
Tenemos z = -5/2+(5/2)(-1) = -10/2 = -5, y un punto de (I) es B(0, -1, -5) y su vector de posición es el **OB** = = **b** = (0, -1, -5).
(b)
Calcular la ecuación vectorial de cada una.

En (I) punto A(0, -11/2, -7/2) vector director $\mathbf{u_1}$ = (2, 1, 3) luego **la ecuación vectorial de (I) es:**
(I) $\equiv$ (x, y, z) = (0, -11/2, -7/2) + m·(2, 1, 3) con m $\in$ R.

En (II) punto B(0, -1, -5) vector director $\mathbf{v_1}$ = (1, -1, 2) luego **la ecuación vectorial de (II) es:**
(II) $\equiv$ (x, y, z) = (0, -1, -5) + n·(2, 1, 3) con n $\in$ R.

(c)
Calcula el rango de la matriz formada por los vectores directores y el vector diferencia, o vector resta, de los vectores de posición obtenidos. [2 puntos]

Me piden rango de los vectores $\mathbf{u_1}$ = (2, 1, 3), $\mathbf{v_1}$ = (1, -1, 2) y $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ = (0, -1, -5) - (0, -11/2, -7/2) =
= (0, 9/2, -3/2).
Utilizamos las transformaciones elementales de Gauss e intentamos triangular la matriz ($\mathbf{u_1}$, $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$), el rango será el número de filas que queden con elementos distinto de cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 9/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ E_2\text{-}2E_1 \\ E_3\cdot 2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ E_3 - 3E_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ E_2\text{-}2E_1 \\ E_3\cdot 2 \end{matrix}$$

, **luego rango($\mathbf{u_1}$, $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$) = 2.**

(d)
Del rango anterior, deducir la posición relativa de ambas rectas. [2 puntos]

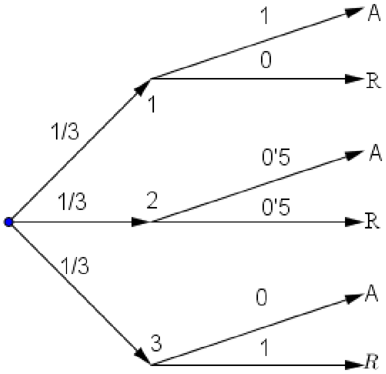
Como el rango es 2 y los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{v_1}$ no son proporcionales, **las rectas (I) y (II) se cortan en un punto.**

4A.- Tenemos tres urnas, la primera contiene 2 bolas azules; la segunda, 1 bola azul y 1 roja; la tercera, dos bolas rojas. Realizamos el experimento aleatorio "Escoger una urna al azar y extraer una bola". Suponemos que todas las urnas tienen la misma probabilidad de ser escogidas.
(a) Calcula la probabilidad del suceso R = "la bola extraída es roja". (5 puntos)
(b) Si la bola extraída es roja, cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la tercera. (5 puntos)
Solución
(a)
Calcula la probabilidad del suceso R = "la bola extraída es roja".

Llamemos 1, 2, 3, 2L y R, a los sucesos siguientes, "urna 1ª", "urna 2ª", "urna 3ª", "bola azul" y "bola roja", respectivamente.

Datos del problema: p(1) = p(2) = p(3) = 1/3; p(A/1) = 1; p(A/2) = p(R/2) = 1/2; p(R/3) = 1, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(bola roja)** = **p(R)**

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Piden **p(R)** = p(1)·p(R/1) + p(2)·p(R/2) + p(3)·p(R/3) = (1/3)·(0) + (1/3)·(0'5) + (1/3)·(1) **= 1/2 = 0'5**.
(b)
Si la bola extraída es roja, cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la tercera.

Me piden **p(si ha salido bola roja se haya realizado desde la urna tercera)** = **p(3/R)**

Por la fórmula de Bayes:

$$\mathbf{p(3/R) =} \frac{p(3 \cap R)}{p(R)} = \frac{p(3)\cdot p(R/3)}{p(R)} = \frac{(1/3)\cdot(1)}{0'5} \mathbf{= 2/3 \cong 0'66667.}$$

Opción B

1B.- Dadas las matrices A y B, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(a) calcula A·B y $(A\cdot B)^t$, donde "t" indica la matriz traspuesta. (4 puntos)
(b) ¿es posible calcular B^2? Si lo és, calcúlala. (1 puntos)
(c) Calcula el rango de A, según los valores de x. (5 puntos)

Solución

(a)
calcula A·B y $(A\cdot B)^t$, donde "t" indica la matriz traspuesta.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2 & 7 \\ 12 & 14 \\ 18 & 21 \end{pmatrix};\ (A\cdot B)^t = \begin{pmatrix} x+2 & 7 \\ 12 & 14 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} x+2 & 12 & 18 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}.$$

(b)
¿es posible calcular B^2? Si lo és, calcúlala. (1 puntos)

Para poder multiplicar dos matrices de M y N de izquierda a derecha el número de columnas de la primera matriz M tiene que coincidir con el número de filas de la segunda N.

Como $B^2 = B_{3x\mathbf{2}}\cdot B_{\mathbf{3}x2}$, **no se puede efectuar la multiplicación de B por B**.

(c)
Calcula el rango de A, según los valores de x.

$$\text{Como } \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{matrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & 8-2x \\ 0 & 0 & 12-3x \end{vmatrix}\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 0,$$ **rango(A) < 3 sea cuál sea x.**

En la matriz A la fila 2ª y 3ª son proporcionales, por tanto sólo utilizamos la fila 1ª y 2ª.
Vemos que **si x = 4**, fila 1ª, 2ª y 3ª son proporcionales, luego **rango(A) = 1**, **y si $x \neq 4$ rango(A) = 2.**

2B.- En un acuario, el estudio de la evolución de la población de peces se expresa según la función $t\to P(t)$, $P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$, con la variable t, que es un número real mayor o igual que cero, midiendo el número de años transcurridos desde la primera generación del año 2000 y P(t) indica el número de individuos, en miles, en el instante de tiempo t. Según dicho modelo, calcula:
(a) La población que había en la 1ª generación del año 2000 y la habrá al fin del año 2020. (1 punto)
(b) El tamaño de la población (en número de individuos) a largo plazo. (3 puntos)
(c) El año en el que se obtiene la mínima población y cuantos individuos habrá. (4 puntos)
(d) Hacer un esbozo de la gráfica de la evolución de la población $t \to P(t)$. (2 puntos)

Solución

(a)
La población que había en la 1ª generación del año 2000 y la habrá al fin del año 2020.

Me están pidiendo P(0) y P(20).
$P(0) = \sqrt{0+1} - \sqrt{0} = \sqrt{1} = 1$, es decir **había 1000 peces en la 1ª generación**.
$P(20) = \sqrt{21} - \sqrt{20} \cong 0'1104$, es decir **habrá 110 peces en la 20ª generación**

(b)
El tamaño de la población (en número de individuos) a largo plazo. (3 puntos)

$$\text{Me piden } \lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t+1} - \sqrt{t}\right) = \left\{\begin{matrix} \infty-\infty;\text{Indeterminación} \\ \text{conjugada} \end{matrix}\right\} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{t+1} - \sqrt{t}\right)\cdot\left(\sqrt{t+1} - \sqrt{t}\right)}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{t+1}\right)^2 - \left(\sqrt{t}\right)^2}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t + 1 - t}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \frac{1}{\infty+\infty} = 0$$, es decir **a largo plazo el número de individuos desaparece.**

(c)
El año en el que se obtiene la mínima población y cuantos individuos habrá.

Estudiamos la monotonía de P(t), que es el estudio de P '(t).

$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$; $P'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.

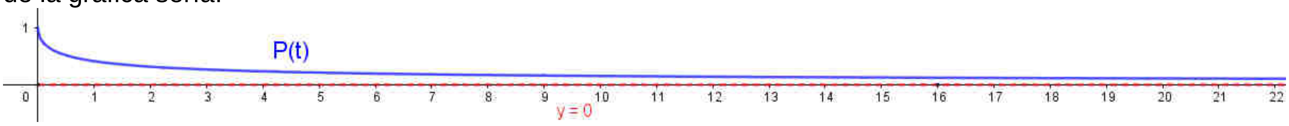
Si P '(t) = 0 $\rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{t}} = 0 \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \rightarrow \sqrt{t} = \sqrt{t+1}$, elevando al cuadrado queda t = t + 1 que es absurdo, **luego P(t) no tiene extremos** y será siempre estrictamente creciente o decreciente.

Como $P'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{1}} \cong -0'646 < 0$, **P(t) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(0, +\infty)$, empezando por 1 millar de peces y tendiendo a cero (y = 0 es asíntota horizontal en $+\infty$).**

(d)

Hacer un esbozo de la gráfica de la evolución de la población $t \rightarrow P(t)$. (2 puntos)

Tenemos P(0) = 1, $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 0$ (y = 0 es asíntota horizontal en $+\infty$), es estrictamente decreciente, tiene que tener la forma $(\cup)$, y recordamos que la gráfica de la raíz cuadrada es una parábola horizontal, un esbozo de la gráfica sería:



3B.- Dados los planos (I) 3x - ay + 2z - (a - 1) = 0, (II) 2x - 5y + 3z - 1 = 0, (III) x + 3y - (a - 1)z = 0,

(a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a, no hay ninguno par que sean paralelos. (4 puntos)

(b) Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a. (6 puntos)

Solución

(a)

Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a, no hay ninguno par que sean paralelos.

Los planos no son paralelos si sus vectores normales no son proporcionales.

Vectores normales $\mathbf{n_I}$ =(3, -a, 2), $\mathbf{n_{II}}$ = (2, -5, 3), $\mathbf{n_{III}}$ = (1, 3, 1-a).

Como 3/2 $\neq$ 2/3, **los planos I y II no son paralelos.**

Como 2/1 $\neq$ -5/3, **los planos II y III no son paralelos.**

De 3/1 = -a/3 = 2/(1-a), tenemos dos ecuaciones:

Si 3/1 = -a/3, resulta <u>a = -9.</u>

Si 3/1 = 2/(1-a), resulta 3 - 3a = 2, de donde <u>a =1/3</u>. Como los valores de "a" no coinciden, **los planos I y III no son paralelos.**

(b)

Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a. (6 puntos)

Tenemos el sistema $\begin{cases} 3x - ay + 2z = a-1 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y -(a-1)z = 0 \end{cases}$, con $A = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -(a-1) \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 & a-1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -(a-1) & 0 \end{pmatrix}$ matriz de los coeficientes y matriz ampliada del sistema.

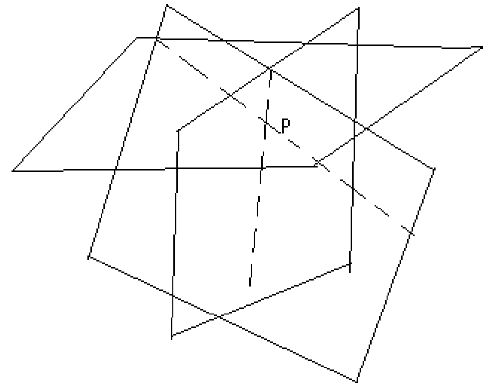
De det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -(a-1) \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1-3F_3 \\ F_2-2F_3 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a-9 & 3a-1 \\ 0 & -11 & 2a+1 \\ 1 & 3 & -(a-1) \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 1((-a-9)(2a+1) + 11(3a-1)) =$

$= -2a^2 - 19a - 9 + 33a - 11 = -2a^2 + 14a - 20.$

De |A| = 0, tenemos $-2a^2 + 14a - 20 = 0 = a^2 - 7a + 10 \rightarrow a = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$, es decir a = 2 y a = 5.

Si a $\neq$ 2 y a $\neq$ 5, rango (A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, Por el Teorema de Rouche el <u>sistema es compatible y determinado</u>, tiene <u>*solución única*</u>. <u>*Los tres planos se cortan en un punto*</u> que se obtiene resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Geométricamente



Si a = 2, tenemos $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

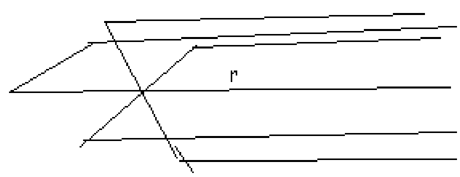
En A como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 4 = -11 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} F_2\text{-}F_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener las filas 2ª y 3ª proporcionales, rango(A*) = 2

Si a = 2, rango (A) = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, por el Teorema de Rouchè el sistema es <u>compatible e indeterminado</u>. De las tres ecuaciones una depende de las otras dos y como rango(A^*) =2, *<u>los tres planos se cortan en una recta.</u>*

El único caso que se presenta es (porque los planos dos a dos no eran paralelos):

<u>Los tres planos son distintos y se cortan en una recta</u>



Si a = 5, tenemos $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

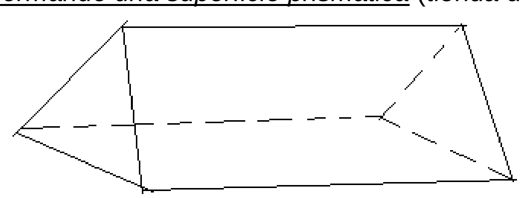
En A como $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 10 = -5 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} C_2\text{-}3C_1 = \begin{vmatrix} 3 & -14 & 4 \\ 2 & -11 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 1(-14+44) = 30 \neq 0$, rango(A*) = 3

Si a = 5, rango (A) = 2 ≠ rango(A^*) =3, por el Teorema de Rouchè el <u>sistema es incompatible</u> y los tres planos *<u>no tienen ningún punto en común.</u>*

Como *<u>rango(A^*) = 3, los tres planos son distintos dos a dos</u>*, y el único caso (recuerdo que los planos no eran paralelos dos a dos) es:

<u>Los planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática</u> (tienda de campaña canadiense)



4B.- El peso de un grupo de personas sigue una distribución normal de media 54’3 kg y desviación típica 6’5 kg.
(a) ¿Cuál es el porcentaje de personas con un pero superior a 57 kg. (3 puntos)
(b) ¿Qué porcentaje de personas pesan entre 50 y 57 kg? (4 puntos)
(c) Si elegimos una persona al azar que está dentro del 70 % de las personas que menos pesan, como máximo, cuantos quilos debería de pesar? (3 puntos)

Solución

(a)
¿Cuál es el porcentaje de personas con un pero superior a 57 kg. (3 puntos)

La variable X “peso de un grupo de personas”, sigue una normal N(μ, σ) = N(54’3, 6’5).

Me piden, en porcentaje, **p(X ≥ 57) =** {Tipificamos} = $p\left(Z \geq \frac{57 - 54'3}{6'5}\right)$ = p(Z ≥ 0’415) = {contrario} =
= 1 - p(Z ≤ 0’415) = 1 – (p(Z ≤ 0’41) + p(Z ≤ 0’42))/2 = 1 – (0’6591 + 0’6628)/2 = 1 – 0’66095 =
= 0’33905 = 33’905%.

(b)
¿Qué porcentaje de personas pesan entre 50 y 57 kg?

Me piden, en porcentaje, **p(50 ≤ X ≤ 57) =** {Tipificamos} = $p\left(\frac{50 - 54'3}{6'5} \leq Z \leq \frac{57 - 54'3}{6'5}\right)$ =
= p(-0’66 ≤ Z ≤ 0’415) = p(Z ≤ 0’415) - p(Z ≤ -0’66) = {suceso contrario} = p(Z ≤ 0’415) - (1 - p(Z ≤ 0’66)) =
= 0’660952 - 1 + 0’7454 = 0’40635 = 40’635%.

(c)
Si elegimos una persona al azar que está dentro del 70 % de las personas que menos pesan, como máximo, cuantos quilos debería de pesar?

Nos dicen que p(X > k) = 70% = 0’7 = {tipificando} = $p\left(Z \leq \frac{k - 54'3}{6'5}\right)$.

La probabilidad 0’7 no viene en la tabla de la N(0, 1), vienen 0’6985 y 0’7019, que corresponden a valores de la N(0, 1) $z_{1-\alpha/2}$ de 0’52 y 0’53 luego consideramos la media, es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (0’52 + 0’53)/2 = 0’525.

Igualando tenemos $\frac{k - 54'3}{6'5} = 0'525$, de donde k = 54’3 + (6’5)·(0’525) = 57’7125, es decir **la persona debe de pesar 57’7125 kg, como máximo, para estar dentro del 70 % de las personas que menos pesan**.